Secretaría de Educación Distrital

COLEGIO REPÚBLICA DE COLOMBIA IED

"Educación en Valores para la Convivencia y la Productividad"

MATERIAL DE APOYO ACADEMICO CONTINGENCIA POR AISLAMIENTO OBLIGATORIO

ACTIVIDADES ACADEMICAS A DESARROLLAR EN EL CUARTO PERIODO COMPRENDIDO ENTRE:

A convenir GRADO: UNDÉCIMO

En la siguiente guía se encuentran algunos conceptos que se explicarán y hay algunos ejercicios de práctica, estos ejercicios se deben resolver en hojas cuadriculadas y llévalas al colegio según las indicaciones dadas al recibirlas para que puedan ser valoradas.

FUNCIÓN

Función Es una relación que asigna a cada elemento x de un conjunto A un único elemento de un conjunto B. Se llama dominio de f (indica D(f)) al conjunto de valores que toma la variable independiente x.

El codominio de f f(C(f)) son los posibles valores que toma y = f(x) llamada la variable dependiente.

Una función es continua cuando para todos los valores de x en el dominio existe un valor de f(x) en el codominio.

Para determinar la monotonía de una función se debe tener en cuenta si la fucnión es creciente, decreciente o constante. A partir del cambio de monotonía de la función se define el **PUNTO DE INFLEXION,** es decir, es el punto donde la gráfica de la función cambia de dirección. La **CONCAVIDAD** de una función se define a partir de la gráfica de la función, es decir cuando es CONCAVA O CONVEXA. Una función es **SIMETRICA** respecto al eje y cuando $f(-x) = f(x)$ es decir cuando es una función **PAR**. Una función es **SIMETRICA** con respecto al origen del sistema de coordenadas cuando

$f(-x) = -f(x)$ es decir cuando es una función **IMPAR.**

ACTIVIDAD 1

1. Realizar un mapa conceptual de análisis de funciones
2. completar la tabla de análisis de las siguientes funciones; debe explicar cada una de las respuestas.

tenga en cuenta.

FUNCION	GRAFICA	DOMINIO	CODOMINIO	CONTINUIDAD	MONOTONIA	PUNTO DE INFLEXION	CONCAVIDAD	SIMETRIA	PAR/IMPAR
CUBICA $F(x) = X^3$									
RACIONAL									
VALOR ABSOLUTO $F(x) = \mid X \mid$									
PARTE ENTERA $F(X) = [X]$									
EXPONENCIAL									
LOGARITMICA									
POR TRAMOS									
SENO F(X)= SEN(X)									
COSENO									
TANGENTE									

3. Defina que es una función inversa
4. Determine cuales de las funciones de la tabla anterior tienen función inversa, en caso de tenerla debe definir y graficar la inversa, de lo contrario justificar porque no tiene.

CONCEPTOS BASICOS DE ESTADISTICA ANALISIS DE DATOS

Población: es el conjunto de elementos que cumplen una característica determinada.

Muestra: es un subconjunto de la población.

Variable estadística; es una característica de una población que se puede medir para hacer un análisis de la misma.

Clasificación de variables: las variables se clasifican en CATEGORICAS O CUALITATIVAS y NUMERICAS O CUANTITATIVAS.

A su vez las categóricas o cualitativas pueden ser NOMINAL (exclusivas y sin orden por ejemplo el estado civil) y ORDINAL (exclusivas y ordenadas por ejemplo el rendimiento académico E, B, R M).

Las numéricas o cuantitativas pueden ser

Discretas: (Definidas por valores enteros por ejemplo el número de hijos)

Continuas: (Valores decimales por ejemplo el peso de una persona)

Estudio de variables: Las variables cualitativas se estudian mediante la distribución de frecuencias, pues no admiten promedios es decir, agrupar los datos por la frecuencia con que se repiten con determinados intervalos llamados clases esta permite determinar la frecuencia absoluta, de la misma manera se puede determinar la frecuencia relativa dividiendo la frecuencia absoluta entre el número de datos, esta se expresa en porcentajes y finalmente la frecuencia cumulada es el resultado de sumar sucesivamente las frecuencias absolutas, desde el menor al mayor de sus valores . Mientras las variables cualitativas se estudian mediante medidas de tendencia como:

Promedio: (Suma dividida por el número de datos)

Media geométrica: (La raíz n, del producto de n datos)

Mediana o tendencia central (Suma de los dos datos centrales dividida por dos)

ACTIVIDAD 2

1. Realizar un mapa conceptual de los conceptos básicos
2. Objetivo: realizar una encuesta sobre uno de los siguientes temas
   - Empleo y desempleo
   - Proyectos de estudio
   - Futuro del país

Contenido del trabajo

- Objetivo: para que se realiza la encuesta.
- Encuesta: definir el tipo de variables utilizara en su encuesta (cualitativas o cuantitativas)
- Tabulación de datos, frecuencia absoluta y frecuencia relativa.
- Representación: diagramas de barras y diagramas circulares.
- Conclusiones: análisis de datos.

SUCESIONES

Una **sucesión** (o **progresión**) **numérica** como un conjunto de números ordenados. A cada uno de estos números los llamamos **términos** de la sucesión: a_1 es el primer término, a_2 es el segundo término, a_3 es el tercer término... a_n es el n-ésimo término.

Las características que las definen:

- En función del número que tengan, las sucesiones pueden ser **finitas** o **infinitas**.
  Finitas. La sucesión termina en un momento determinado.
  Infinitas. La sucesión no termina nunca.
- **Crecientes** si cada término es mayor o igual que su anterior, es decir, $a_n \leq a_{n+1}$
- **Decrecientes** si cada término es menor o igual que su anterior $a_n \geq a_{n+1}$
- **Sucesiones estrictamente crecientes:** si cada uno de sus **términos es mayor que el anterior**. $\mathbf{a_{n+1} > a_n}$
- Sucesiones estrictamente decrecientes cada uno de sus **términos es menor que el anterior**. $\mathbf{a_{n+1} < a_n}$
- Sucesiones monótonas: si es creciente o decreciente.
- Sucesiones constantes: Se dice que una sucesión es creciente si cada uno de sus **términos es igual que el anterior**. $\mathbf{a_{n+1} = a_n}$
- **Aritméticas** cuando cada término es la suma del término anterior más un número constante, al que se llama **diferencia** y se denota por *d*. Es decir, $a_n+1=a_n+d$
- G**eométricas** cuando cada término es el término anterior multiplicado por un número constante, al que se llama **razón** y denotamos por *r*. Es decir, $a_{n+1}=a_n \cdot r$

En el caso de las sucesiones aritméticas y geométricas se puede encontrar una fórmula, a la que se llama **fórmula general de la progresión**, que indica el valor de cualquier término de la sucesión sin necesidad de escribir los términos anteriores. Igualmente, se pueden calcular la suma de *n* términos consecutivos y, en ocasiones, la suma de infinitos términos.

SUCESIÓN ARITMÉTICA	
Es de la forma a_1 $a_2 = a_1 + d$ $a_3 = a_2 + d$ $a_4 = a_3 + d$ ...	
Diferencia $d = a_{n+1} - a_n$	Término general $a_n = a_1 + d(n-1)$
Suma de los *n* primeros términos $s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$	

SUCESIÓN GEOMÉTRICA	
Es de la forma a_1 $a_2 = a_1 \cdot r$ $a_3 = a_2 \cdot r$ $a_4 = a_3 \cdot r$ ...	
Razón $r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$	Término general $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$
Suma de los *n* primeros términos $s_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1}$ $S_n = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$	Suma de todos los términos $s_\infty = \frac{a_1}{1-r}$ si $\lvert r \rvert < 1$

Además...

Una sucesión **aritmética** es

- **decreciente** si $d < 0$,
- **creciente** si $d > 0$ y
- **constante** si $d = 0$.

Una sucesión **geométrica** cuyo primer término es positivo es

- **decreciente** si $0<r<1$ y
- es **creciente** si $r>1$

Y si el primer término es negativo, es

- **creciente** si $0<r<1$ y
- **decreciente** si $r>1$

Además, independientemente del primer término, es **constante** si $r=1$ y es **alternada** si r es negativo (cambia el signo en cada término).

Ejemplos

1. En una progresión aritmética, sabemos que el sexto término es 28 y que la diferencia es 5. Calcular el término general y los 5 primeros términos.

Conocemos el término 6-ésimo y la diferencia:

$$a_6 = 28, \;\; d = 5$$

Queremos calcular el término general de la sucesión, an, que sabemos que es de la forma

$$a_n=a_1+(n-1)\cdot d$$

Como la diferencia es d=5, tenemos

$$a_n = a_1 + (n-1)d =$$
$$= a_1 + 5(n-1)$$

Necesitamos calcular el primer término de la sucesión, a_1 Para ello, aplicamos la fórmula para el caso n=6 ya que sabemos que $a_6=28$. Sustituimos en la fórmula:

$$28 = a_6 = a_1 + (6-1)5 = a_1 + 25 \quad \rightarrow$$
$$28 = a_1 + 25 \quad \rightarrow \quad a_1 = 3$$

Por tanto, el término general de la sucesión aritmética es $a_n = 3 + 5(n-1)$

Los cinco primeros términos son

$$a_1 = 3$$
$$a_2 = 3 + 5 \cdot 1 = 8$$
$$a_3 = 3 + 5 \cdot 2 = 13$$
$$a_4 = 3 + 5 \cdot 3 = 18$$
$$a_5 = 3 + 5 \cdot 4 = 23$$

Nota: Se han calculado los términos aplicando la fórmula obtenida, pero una vez sabemos que el primer término es 3 y que la diferencia es 5, se pueden obtener fácilmente los términos sumando 5:

$a_1=3$ $a_2=3+5=8$ $a_3=8+5=13$

$a_4=13+5=18$ $a_5=18+5=23$

2. En una progresión geométrica, sabemos que el primer término es 6 y el cuarto 48. Calcular el término general y la suma de los 5 primeros términos.

Se conoce el primer y el cuarto término: $a_1 = 6, \quad a_4 = 48$

Puesto que la progresión es geométrica, su fórmula general es de la forma $a_n = a_1 r^{n-1}$

De dicha fórmula se conoce el término a_1, pero no se conoce la razón, r. Para calcularla, se aplica la fórmula para el caso n=4 porque sabemos que a_4=48:

$$48 = a_4 = 6 \cdot r^3 \rightarrow$$
$$48 = 6r^3 \quad \rightarrow$$
$$r^3 = \frac{48}{6} = 8 \quad \rightarrow$$
$$r = \sqrt[3]{8} = 2$$

Por tanto, la razón es r=2 y el término general es $a_n = 6 \cdot 2^{n-1}$

Para calcular la suma de los 5 primeros términos, aplicamos la fórmula. Necesitaremos calcular el término a_5:

$$S_5 = \frac{a_5 \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{a_5 \cdot 2 - 6}{2-1} = a_5 \cdot 2 - 6$$

$$a_5 = 6 \cdot 2^4 = 96$$
$$S_5 = 96 \cdot 2 - 6 = 186$$

ACTIVIDAD

1. Encontrar el término general de la sucesión 20, 19.3, 18.6, 17.9, … ¿Es aritmética o geométrica? Encontrar los términos: décimo (10), vigésimo (20) y trigésimo (30).
2. En una progresión aritmética, sabemos que el primer término es 1 y la suma de los 10 primeros términos es 63. Calcular el término general.
3. En una progresión aritmética finita, el segundo término es -23 y el último 32. Si se sabe que hay 12 términos, calcular el término general.
4. La suma de tres términos consecutivos de una sucesión aritmética cuya diferencia es 11 vale 66. Encontrar dichos términos.

5. La suma de *n* números naturales consecutivos a partir de 55 (sin incluirlo) vale 738. Encontrar *n*. La suma de 6 números impares consecutivos vale 120. Encontrar dichos números.

6. Una progresión geométrica comienza en 1 y tiene razón 2. Encontrar los tres términos consecutivos (de la sucesión) cuyo producto es 512.

7. Encontrar el término general de la sucesión 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ... ¿Es aritmética o geométrica?

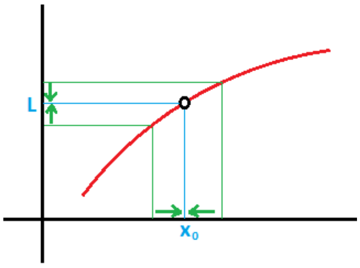
LIMITES

El **límite de una función en un punto** es obtener el valor al que se va aproximando esa función cuando x tiende a un determinado punto, pero sin llegar a ese punto. Se representa de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = L$$

Que significa, que cuando X tiende al punto Xo, el valor de la función se va aproximando a L, por tanto, el límite de esa función cuando X tiende a Xo es L.

Gráficamente quedaría de la siguiente manera:



Conforme nos vamos aproximando al valor Xo en el eje x, en el eje y, el valor de la función se va a aproximando al valor L.

x puede tender a cualquier valor, desde menos infinito hasta más infinito (ambos incluidos) y el límite de una función también puede ser desde menos infinito hasta infinito (ambos incluidos).

No hay que confundir el límite de una función con el **valor de una función en punto**, que es el valor que tiene la función justo en ese punto.

¿Cuál es el límite de la siguiente función: cuando x tiende a -1? $f(x) = x^2 + 2x + 1$

El límite de la función cuando x tiende a -1 se escribe: $\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} x^2 + 2x + 1 =$

Para que se vea como el valor de la función se va a aproximando a un valor determinado, mientras que x va tendiendo a -1, vamos a ir viendo cuál es el valor de la función para los puntos que próximos a -1 y cada vez nos vamos a ir acercando más a -1.

Primero nos vamos a ir acercando cada vez más a -1 por la izquierda a ver qué pasa.

Cuando x=-1,3, el valor de la función es: $f(-1{,}3) = (-1{,}3)^2 + 2.(-1{,}3) + 1 = 0{,}09$

Cuando x=-1,2, el valor de la función es: $f(-1{,}2) = (-1{,}2)^2 + 2.(-1{,}2) + 1 = 0{,}04$

Cuando x=-1,1, el valor de la función es: $f(-1{,}1) = (-1{,}1)^2 + 2.(-1{,}1) + 1 = 0{,}01$

Conforme nos vamos acercando a -1, el valor de la función se va aproximando a 0.

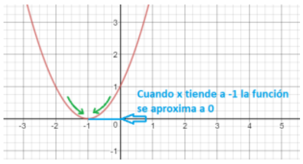
Vamos a hacer lo mismo ahora, pero acercándonos al 1 por la derecha.

Cuando x=-0,7, el valor de la función es: $f(-0{,}7) = (-0{,}7)^2 + 2.(-0{,}7) + 1 = 0{,}09$

Cuando x=-0,8, el valor de la función es: $f(-0{,}8) = (-0{,}8)^2 + 2.(-0{,}8) + 1 = 0{,}04$

Cuando x=-0,9, el valor de la función es: $f(-0{,}9) = (-0{,}9)^2 + 2.(-0{,}9) + 1 = 0{,}01$

Como puedes observar, conforme nos vamos acercando a x=-1 por la derecha, la función se va aproximando cada vez más a 0.



Si lo vemos en una gráficamente, vemos como la gráfica de la función se aproxima al punto 0 en el eje y, cuando los valores de x se van a aproximando al punto -1 en el eje x:

Por tanto, el límite de la función cuando x tiende a -1 es igual a 0:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} x^2+2x+1=0$$

Para resolver un límite no es necesario realizar este procedimiento que acabamos de hacer. Tan solo lo he hecho para que fueras viendo cómo poco a poco el valor de la función se va aproximando a un punto.

Resolver el límite de esa función es mucho más sencillo y es lo que te voy a explicar en el siguiente apartado.

Cómo resolver el límite de una función

En los casos donde el dominio de la función es todo R (la función es continua en todo R), como por ejemplo en polinomios, el límite de la función en un punto se va a calcular igual que el valor de la función en ese punto, es decir, **sustituyendo el valor por la x**.

Vamos a resolver el límite de la función anterior cuando x tiende a -1:

$$\lim_{x \to -1} x^2+2x+1 =$$

Para resolverlo, tenemos que sustituir la x por -1 y operar:

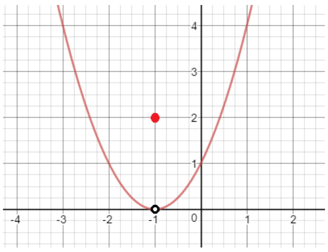
$$=(-1)^2+2.(-1)+1=1-2+1=0$$

Y obtenemos el resultado del límite que es 0.

En este caso, el límite de la función cuando x tiende a -1, y el valor de la función en -1 coinciden, pero no tiene por qué ser así.

En **funciones que no son continuas** (**el dominio no es todo R**), hay puntos donde el límite tenga un valor y sin embargo, la función en ese punto no exista o el valor de la función tenga otro valor distinto.

Por ejemplo, en la siguiente función:



El límite cuando x tiende a -1 es igual a 0, pero sin embargo el valor de la función en x=-1 es igual a 2:

$$\lim_{x \to -1} f(x)=0$$

$$f(-1)=2$$

O el caso de esta otra función:

$$f(x)=\frac{x}{x-1}$$

Vamos a ver qué pasa si calculamos el límite de la función cuando x tiende a 1:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x}{x-1} =$$

Sustituimos la x por el 1:

$$=\frac{1}{1-1}=\frac{1}{0}=Indeterminado$$

Y no llegamos a ninguna solución, ya que un número entre cero es una indeterminación.

Límites laterales

Hemos visto antes que el límite de una función es el valor al que se va aproximando esa función cuando x tiende a un determinado punto, tanto por la izquierda como por la derecha.

Sin embargo, se puede calcular el límite de una función cuando nos aproximamos **sólo por la izquierda** o cuando nos aproximamos **sólo por la derecha**. Son llamamos **límites laterales.**

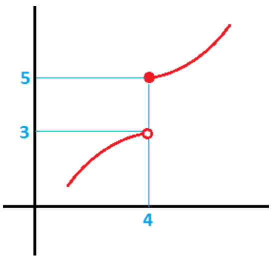
El valor de los límites laterales de una función puede coincidir o no.

Para que exista el límite de una función en un punto, el valor de los límites laterales debe coincidir y ése será el valor del límite en ese punto.

Si los límites laterales no coinciden, entonces el límite no existe.

Ejemplo:

Tenemos la siguiente función:



Vamos a calcular cuánto vale el límite de la función cuando x tiende a 4.

Si nos acercamos a x=4 por la izquierda, el límite es igual a 3:

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = 3$$

Cuando el límite lateral es **por la izquierda**, se le añade **como exponente un signo menos** al valor de x al que tiende el límite.

Si nos acercamos a x=4 por la derecha, el límite es igual a 5: $\lim_{x \to 4^+} f(x) = 5$

Cuando el límite lateral es **por la derecha**, se le añade **como exponente un signo más** al valor de x al que tiende el límite.

Los límites laterales en este caso no coinciden, por tanto el límite de la función cuando x tiende a 4 (por los dos lados) no existe: $\lim_{x \to 4^-} f(x) \neq \lim_{x \to 4^+} f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 4} f(x)$

El símbolo de «no existe» es una E mayúscula al revés tachada.

ACTIVIDAD

1. Resuelve los siguientes límites directos:

   1. $\lim_{x \to 2} \left(x + 3\right)$
   2. $\lim_{x \to 0} \frac{5x^2}{2}$
   3. El límite de la función $f(x) = \frac{3x}{x^2+x+2}$ en $x=1$
   4. $\lim_{x \to -2} \sqrt{x+1}$
   5. $\lim_{t \to \frac{\pi}{3}} (\cos(t)+2)$
   6. $\lim_{x \to 10^{-3}} \log(10 \cdot x)$

2. Determina el valor de cada límite a partir de la gráfica de $f(x)$ que se muestra en la Figura 3.13.

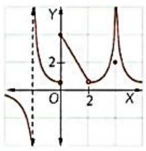


Figura 3.13

a. $\lim_{x \to -2^-} f(x)$ b. $\lim_{x \to -2^+} f(x)$

c. $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ d. $\lim_{x \to 2^+} f(x)$

e. $\lim_{x \to 4^-} f(x)$ f. $\lim_{x \to 4^+} f(x)$

Leyes y propiedades de los límites

Los límites tienen una serie de **leyes y propiedades** que debemos dominar y que son muy útiles para resolver problemas. Veamos cada una de estas leyes y propiedades a detalle.

Nombre	Fórmula
Propiedad de sustitución	$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
Límite de una constante	$\lim_{x \to a} c = c$
Límite de x	$\lim_{x \to a} x = a$
Límite de una potencia	$\lim_{x \to a} x^n = a^n$ "n" es un entero positivo
Ley de la suma	$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$
Ley de la resta o diferencia	$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$

Nombre	Fórmula
Ley del múltiplo constante	$\lim_{x \to a} c.f(x) = c.\lim_{x \to a} f(x)$
Ley del producto	$\lim_{x \to a} [f(x).g(x)] = \lim_{x \to a} f(x).\lim_{x \to a} g(x)$
Ley del cociente	$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ Condición: $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$
Ley de potencia	$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n$ "n" es un entero positivo
Ley de la raíz	$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$ "n" es un entero positivo. Si "n" es par, suponemos $\lim_{x \to a} f(x) > 0$

Propiedad de sustitución directa: si «f» es una <u>función polinomial</u> o una <u>función racional</u> y «a» está en el dominio de «f»; entonces: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Las funciones que cumplen con la propiedad de sustitución directa son **funciones continuas en x = a.**
Ejemplos

1. Calcular siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 2} 2x = 2(2) = 4$

b) $\lim_{x \to 3} x^2 = (3)^2 = 9$

c) $\lim_{x \to 3} (2x + 1) = 2(3) + 1$

Podemos aplicar la propiedad de sustitución directa, pues se trata de **funciones polinomiales** que tienen como dominio a todos los reales.

2. Calcular los siguientes límites, sabiendo que:

$\lim_{x \to 2} \boldsymbol{f(x) = 3} \quad \wedge \quad \lim_{x \to 2} \boldsymbol{g(x) = 4}$

a) $\lim_{x \to 2} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to 2} f(x) + \lim_{x \to 2} g(x) = 3 + 4 = 7$

b) $\lim_{x \to 2} 31. f(x) = 31. \lim_{x \to 2} f(x) = 31.3 = 93$

c) $\lim_{x \to 2} [f(x). g(x)] = \lim_{x \to 2} f(x). \lim_{x \to 2} g(x) = 3 \,.\, 4 = 12$

d) $\lim_{x \to 2} [f(x)]^2 = \left[\lim_{x \to 2} f(x)\right]^2 = [3]^2 = 9$

e) $\lim_{x \to 2} \sqrt{5 + g(x)} = \sqrt{\lim_{x \to 2} [5 + g(x)]} = \sqrt{\lim_{x \to 2} 5 + \lim_{x \to 2} g(x)} = \sqrt{5 + 4} = \sqrt{9} = 3$

ACTIVIDAD

1. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 1} 2x$

b) $\lim_{x \to 3} x^2$

c) $\lim_{x \to 3} (2x + 1)$

d) $\lim_{x \to 1} (3x^2 + 1)$

e) $\lim_{x \to 2} (x^3 - 1)$

2. Sabiendo que $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$, y $\lim_{x \to 2} g(x) = 4$. Calcular:

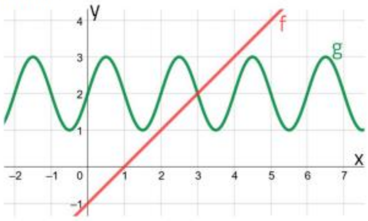
a) $\lim_{x \to 2} [f(x) + g(x)]$

b) $\lim_{x \to 2} [f(x) - g(x)]$

c) $\lim_{x \to 2} [31. f(x)]$

d) $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{g(x)}$

3. Calcular los siguientes límites a partir del gráfico:



a) $\lim_{x \to 3} [2f(x) + 3g(x)]$

b) $\lim_{x \to 4} [4f(x) - 5g(x)]$